

## Εξετάσεις Σεπτέμβριος 2024 - Απειροστικός Λογισμός 2

### Διδάσκοντας Ε. Νικολιδάκης

#### Θέμα 1

- (i) (1 μον.) Έστω ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει αν και μόνο αν η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι άνω φραγμένη.
- (ii) (1.5 μον.) Να μελετηθεί η σειρά  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p + n^{1/3}}$  για όλες τις τιμές του  $p > 1/3$ . Επίσης, να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$
- (iii) (1 μον.) Αποδείξτε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  συγκλίνει αν μόνο αν  $p > 1$ .
- (iv) (0.5 μον.) Να βρεθούν όλα τα  $x \in \mathbb{R}$  για τα οποία η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$  συγκλίνει.

#### Θέμα 2

- (i) (1 μον.) Έστω ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι φραγμένη.
- (ii) (1 μον.) Δίνεται  $f: (0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 10 & , x \in (0, 1) \\ 12 & , x \in (1, 2) \end{cases}$$

Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια και ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τη συνάρτηση  $f$  στο πεδίο ορισμού της.

- (iii) (1,5 μον.) Να εξετασθεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{και} \quad g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}.$$

#### Θέμα 3

- (i) (1 μον.) Διατυπώστε το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας του Riemann. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο αυτό να δείξετε ότι όταν  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ολοκληρώσιμη και  $\kappa > 0$  τότε η συνάρτηση  $\kappa \cdot f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ολοκληρώσιμη.
- (ii) (1 μον.) Δίνεται η συνάρτηση  $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \begin{cases} 40 & , x \in [0, 1] \\ 50 & , x \in (1, 2] \end{cases}.$$

Εξετάστε αν η  $g$  είναι ολοκληρώσιμη στο  $[0, 2]$ . Αν είναι ολοκληρώσιμη, υπολογίστε το ολοκλήρωμα αυτής στο  $[0, 2]$ .

#### Θέμα 4

(i) (0,5 μον.) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int e^x \sin x \, dx$

(ii) (1 μον.) Αν  $x > 0$  να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int \sin(\ln x) \, dx$  (Υπόδειξη: Εφαρμόστε την αλλαγή μεταβλητής  $\ln x = u$ ).

